

Flambage capillaire d'un film mince adhérant sur une sphère

B. AUDOLY^a, J. HURE^b

a. *Institut d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie et CNRS, Paris*

b. *Laboratoire de Comportement Mécanique des Matériaux Irradiés, CEA Saclay*

Résumé :

Nous étudions théoriquement et expérimentalement le flambement d'un film mince enrobant une sphère. La sphère est rigide et mouillée, et recouverte par un film mince de forme initialement cylindrique. L'équilibre du film est gouverné par les effets antagonistes de l'élasticité et de la capillarité : cette dernière favorise l'enrobage de la sphère par le film, mais cet enrobage est limité par les efforts membranaires dans le film, du fait que les courbures de Gauss sont incompatibles. Expérimentalement, la région de contact entre le film et la sphère, initialement à symétrie cylindrique, se déstabilise en une forme ondulante quand le rayon de la sphère dépasse une valeur critique. Une solution non-linéaire des équations de Donnell décrivant les configurations axi-symétriques est obtenue. L'analyse de leur stabilité permet de prédire correctement l'instabilité d'ondulation, la symétrie du mode instable, le seuil d'instabilité et la longueur d'onde au seuil.

Abstract :

We present a combined theoretical and experimental study of the buckling of a thin film wrapped around a sphere. A rigid sphere is coated with a wetting liquid, and then wrapped by a thin film into an initially cylindrical shape. The equilibrium of this cylindrical shape is governed by the competing effects of elasticity and capillarity : capillarity tends to wrap the film around the sphere but this is impossible because of the mismatch of Gauss curvatures. In the experiments, the region of contact between the film and the sphere, which initially has cylindrical symmetry, destabilizes into a wrinkled shape when the sphere radius is larger than a critical value. A non-linear solution of the Donnell equations describing the axisymmetric configuration of the film is derived. The analysis of its stability successfully captures the wrinkling instability, the symmetry of the unstable mode, the instability threshold and the critical wavelength.

Mots clefs : Flambement ; équations de Donnell ; capillarité

1 Introduction

On considère la problématique générale des films minces adhérant à un substrat. Lorsque le film est sous contraintes résiduelles de compression et si l'adhésion est suffisamment faible, le délaminage du film peut se produire [3, 12] : le film flambe alors en se décollant du substrat. Le délaminage se manifeste par des motifs de cloques variés [2]. Dans des expériences récentes, une variante simplifiée du délaminage a été proposée : le substrat est recouvert d'un fluide mouillant et le pont capillaire ainsi créé entre le substrat et le film induit une force d'adhésion [1, 7] : cette force d'adhésion est réversible et agit comme une fissure interfaciale refermable. De telles expériences peuvent être faites à l'échelle centimétrique. Plus largement, les systèmes élasto-capillaires font l'objet d'un intérêt marqué, les forces capillaires étant dominantes aux petites échelles. Les applications vont de la métrologie [5] à la fabrication de récepteurs photovoltaïques en 3 dimensions [4], pour n'en citer que deux.

Ici, nous nous intéressons aux motifs de flambement observés dans des expériences de délaminage élasto-capillaire. On considère le cas de l'adhésion capillaire entre un film mince élastique et un substrat

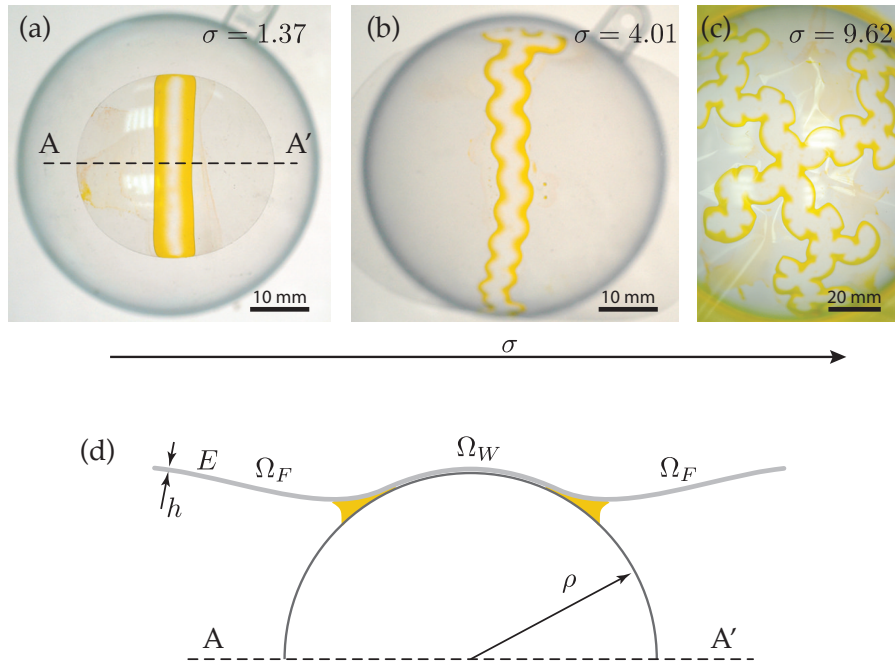


FIGURE 1 – Des films minces élastiques d'épaisseur h , de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν sont placés sur des calottes sphériques de rayon ρ enduites d'un liquide mouillant, de tension de surface $\gamma = 22.4 \text{ mN.m}^{-1}$. Le liquide est teinté en jaune pour la visualisation : les régions visibles en jaune correspondent au ménisque liquide existant au bord de la région de contact — l'intérieur de cette région de contact n'est pas coloré du fait de la faible épaisseur du liquide. Vue de dessus de trois expériences : (a) $E = 2.8 \text{ GPa}$, $h = 30 \mu\text{m}$, $\rho = 25 \text{ mm}$ (b) $E = 2.6 \text{ GPa}$, $h = 15 \mu\text{m}$, $\rho = 25 \text{ mm}$ (c) $E = 2.6 \text{ GPa}$, $h = 15 \mu\text{m}$, $\rho = 60 \text{ mm}$. Le paramètre σ mesure l'adhésion rapportée à la raideur du film (voir [6]). (d) Coupe schématique dans un plan vertical AA'.

sphérique [7]. Cette géométrie est une variante du cas d'une coque sphérique en adhésion sur un substrat plan [11, 8, 9]. Dans nos expériences, une sphère rigide est enduite d'un liquide mouillant et recouverte d'un film mince de polypropylène. Lorsque le film enrobe la sphère sous l'action des forces capillaires, il se trouve étiré tangentiellement par le *Theorema egregium* de Gauss [10] : l'extension membranaire du film permet de compenser la différence de courbures de Gauss entre la sphère (courbure non nulle) et le film plan (courbure nulle). La combinaison de l'élasticité et de la capillarité conduit à une grande variété de morphologies, dont quelques unes sont reproduites dans la figure 1.

Dans la référence [7], l'un de nous a étudié cette compétition au moyen d'arguments d'ordre de grandeur, et proposé une estimation de la taille de la région d'adhésion, qui rend bien compte des expériences. Dans un article récent [6], sur lequel cette présentation est basée, nous avons étudié en détail l'instabilité menant de la configuration à symétrie cylindrique de la figure 1a à la flambée de la figure 1b.

2 Approche et résultats

Pour étudier quantitativement la transition de la configuration à symétrie cylindrique (figure 1a) à la configuration flambée (figure 1b), nous avons adopté l'approche suivante :

- nous avons adapté les équations de Donnell pour les coques quasi-cylindriques de manière à prendre en compte l'adhésion sur un obstacle sphérique rigide. La capillarité est prise en compte au moyen d'une énergie d'adhésion proportionnelle à l'aire de la région de contact. En particulier, nous établissons les équations d'équilibre à la frontière de la région de contact, qui est mobile.
- Nous recherchons les solutions non-flambées de ces équations en supposant une symétrie cylindrique. De telles solutions existent au-dessus d'une valeur seuil de la tension de surface, cette valeur seuil dépendant du rayon de la sphère et de la raideur en flexion du film. Lorsqu'elles existent, elles sont uniques. La largeur de la région de contact prédite par cette solution est comparée avec succès aux

expériences.

- Nous faisons une étude de stabilité linéaire de cette solution axisymétrique, dans le cadre des équations de Donnell avec adhésion décrites plus haut. En variables adimensionnées, cette étude de stabilité linéaire ne dépend que du coefficient de Poisson du film et d'un nombre capillaire. Nous trouvons que la solution cylindrique perd sa stabilité lorsque le nombre capillaire dépasse une valeur critique dépendant uniquement du coefficient de Poisson. Nous prédisons ainsi sans paramètre ajustable la symétrie du mode de flambement, la valeur du seuil et la longueur d'onde au seuil. Toutes ces prédictions sont comparées favorablement aux expériences.

Références

- [1] J. Bico, B. Roman, L. Moulin, and A. Boudaoud. Elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature*, 432 :690, 2004.
- [2] J.-F. Faou, G. Parry, S. Grachev, and E. Barthel. How does adhesion induce the formation of telephone cord buckles. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :116102, 2012.
- [3] G. Gioia and M. Ortiz. Delamination of compressed thin films. *Adv. Appl. Mech.*, 33 :119–192, 1997.
- [4] X. Guo, H. Li, B.Y. Ahn, E.B. Duoss, J. Hsia, J.A. Lewis, and R.G. Nuzzo. Two- and three-dimensional folding of thin film single-crystalline silicon for photovoltaic power applications. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106 :20149–20154, 2009.
- [5] J. Huang, M. Juskiewicz, W.H. de Jeu, E. Cerda, T. Emrick, N. Menon, and T.P. Russell. Capillary wrinkling of floating thin polymer films. *Science*, 317 :650–653, 2007.
- [6] J. Hure and B. Audoly. Capillary buckling of a thin film adhering to a sphere. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61 :450–471, 2013.
- [7] J. Hure, B. Roman, and J. Bico. Wrapping an adhesive sphere with a elastic sheet. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :174301, 2011.
- [8] S. Komura, K. Tamura, and T. Kato. Buckling of spherical shells adhering onto a rigid substrate. *Eur. Phys. J. E*, 18 :343–358, 2005.
- [9] R.M. Springman and J.L. Bassani. Snap transitions in adhesion. *J. Mech. Phys. Solids*, 56 :2358–2380, 2008.
- [10] D.J. Struik. *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover, 1988.
- [11] K. Tamura, S. Komura, and T. Kato. Adhesion induced buckling of spherical shells. *J. Phys. : Condens. Matter*, 16 :L421–L428, 2004.
- [12] D. Vella, J. Bico, A. Boudaoud, B. Roman, and P.M. Reis. The macroscopic delamination of thin films from elastic substrates. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106 :10901, 2009.